Φυλλάδιο #2 - Λύσεις

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

1. Δίνουμε ως παράδειγμα τον πίνακα:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \to \Gamma_i - 2\Gamma_1,\ i=2,3,4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(A)$$, άρα $\text{rank}(A) = 2$

2. α) Έχουμε

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

$$A \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 4\Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \frac{1}{2}\Gamma_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -10 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -10 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 3\Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 10\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \frac{6}{23}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{23}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{3}{23}\Gamma_3}$$

$$\frac{20}{3} + 1 = \frac{23}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Η κλιμακωτή μορφή του } A$$

rank $A = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 11 \\ 4 & -2 & 12 & 8 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 12 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 11 \\ 3 & -3 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{4}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 11 \\ 3 & -3 & 8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 2 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 & 5 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{2}{5}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \frac{3}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{l} +\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \\ +\frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to -\frac{1}{4}\Gamma_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{κλιμακωτή μορφή του πίνακα } A}$$

(<u>Σημείωση</u>: Η προηγούμενες κλιμακωτές μορφές δεν είναι μοναδικές)

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

β) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \frac{3}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Ισχυρά κλιμακωτή μορφή του } A}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 3\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Ισχυρά κλιμακωτή μορφή του } B.}$$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

γ) $\boxed{\text{Για τον } A:}$

Οι γραμμοπράξεις κατά σειρά αντιστοιχούν στους πίνακες:

E_{12}, $E_1\left(\frac{1}{2}\right)$, $E_{21}(-4)$, $E_{31}(-2)$, $E_{41}(-3)$, $E_4\left(\frac{1}{2}\right)$

E_{32}, $E_2\left(\frac{1}{3}\right)$, $E_{32}(10)$, $E_{42}(3)$, $E_{43}\left(-\frac{6}{23}\right)$, $E_3\left(\frac{3}{23}\right)$

$E_{23}\left(-\frac{3}{2}\right)$, $E_{12}(-2)$

$\boxed{\text{Για τον } B:}$

Οι γραμμοπράξεις κατά σειρά αντιστοιχούν στους πίνακες:

E_{13}, $E_1\left(\frac{1}{4}\right)$, $E_{21}(3)$, $E_{31}(3)$, $E_2\left(\frac{2}{5}\right)$, $E_{32}\left(\frac{3}{2}\right)$, $E_3\left(-\frac{1}{4}\right)$

$E_{23}(2)$, $E_{13}(-3)$, $E_{12}\left(\frac{1}{2}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\Gamma_2 \to -\frac{1}{15}\Gamma_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 4\Gamma_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{7}{15} & \frac{4}{15} \\ 0 & 1 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \end{array}\right)$

Οπότε, $\left(1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}\right)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$ και μάλιστα

$A^{-1} = E_{12}(-4) \cdot E_2\left(-\frac{1}{15}\right) \cdot E_{21}(-2)$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

4. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{3}\Gamma_1}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{7}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{7}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to 3\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{7}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right). \xrightarrow{\Gamma_3 \to -\frac{1}{2}\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{7}{3} & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_3 \\ \Gamma_1 \to \Gamma_1 - \frac{7}{3}\Gamma_2}]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \frac{1}{3}\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -7 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

Άρα, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -7 & \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ και

$$A^{-1} = E_{12}\left(-\frac{7}{3}\right) E_{13}(-2)\, E_{23}\left(\frac{1}{2}\right) E_3\left(-\frac{1}{2}\right) E_2(3)\, E_{31}(-3)\, E_{21}(-2)\, E_1\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to -\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Άρα $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

$$B^{-1} = E_{13}(-1)\,E_{23}(-1)\,E_3(-1)\,E_{32}(-2)\,E_{31}(-3)\,E_{21}(-2)\,E_{12}$$

5. Όπως στην 4. υπολογίζουμε τον A^{-1} με τον αλγόριθμο Gauss (τσεκ) και θα βγει

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -7 & 13 \\ 4 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έτσι, $AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B \Leftrightarrow$

$$X=\begin{pmatrix} -8 & -7 & 13 \\ 4 & 3 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix}_{3\times 1}=\begin{pmatrix} 89 \\ -43 \\ 12 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$-16-77+182=182-93=89$$

$$8+33-84=41-84=-43$$

$$-2+0+14=14-2=12$$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

6. Επαυξημένος πίνακας συστήματος ο εξής

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & -1 & -a & -1 \\ a & 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2a & -2 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 0 & -2 & -2a & -2 \end{array}\right)$$

- Αν $a=1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right)$ και το

σύστημα ισοδυναμεί με το $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ -2x_3-2x_4=-2 \end{cases}$

ή $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_3+x_4=1 \end{cases}$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

Η 1η εξίσωση γράφεται:

$$x_1+x_2+1=1 \quad \overset{\text{ή}}{=} \quad x_1+x_2=0$$

Άρα, το σύστημα ισοδυναμεί με το

$$\left.\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3+x_4=1 \end{cases}\right| \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_3=1-x_4 \end{cases}$$

δηλ. έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 1-x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

(διπαραμετρική οικογένεια λύσεων)

- Αν $a=-1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$

το οποίο ισοδυναμεί με σύστημα του οποίου η 2η εξίσωση είναι η $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=2$

και άρα είναι ασυμβίβαστο.

• Αν $a \neq 1$ & $a \neq -1$ $\xRightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{1-a^2}\Gamma_2}$

Κωνσταντίνος Δήμογλου
Μαθηματικός (Msc)
kdimoglou@onlymaths.gr

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & -2 & -2a & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -a & -\frac{a}{1+a} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{1+a} \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

που το σύστημα ισοδυναμεί με το

$$\begin{cases} x_1 - a x_4 = -\frac{a}{1+a} \Rightarrow x_1 = a x_4 - \frac{a}{1+a} \\ x_2 + x_4 = \frac{1}{1+a} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{1+a} - x_4 \\ x_3 + a x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - a x_4 \end{cases}$$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_4 - \frac{a}{1+a} \\ \frac{1}{1+a} - x_4 \\ 1 - a x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

7. Είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_2 \to -\frac{1}{6}\Gamma_2]{\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -10 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 10\Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right)$$ $\left(8 - \frac{10}{3} = \frac{14}{3}\right)$

. Ο τελευταίος πίνακας είναι

ισοδύναμος με το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 - \frac{x_3}{3} = -\frac{1}{3} \\ 3x_3 = -6 \\ -\frac{7}{\cancel{3}}x_3 = \frac{14}{\cancel{3}} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \longrightarrow x_1 = 2 \\ \longrightarrow x_2 = -1 \\ \longrightarrow x_3 = -2 \\ \longrightarrow x_3 = -2 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a\\a\\a\\a \end{array}}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2 \end{array}$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

$X = (2, -1, -2)^t$

Είναι

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Ο τελευταίος πίνακας

ισοδυναμεί με το σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_3 - 3x_4 \\ x_2 = 1 - 3x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

Άρα, το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^t = (4t - 3s, 1 - 3t + 2s, t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

(διπαραμετρική οικογένεια λύσεων)